APPUNTI TEORIA
CORSO DI GEOTECNICA

Anno Accademico 2011/2012

Eleonora Magnotta
Professore R. Lancellotta

$\nabla \cdot \nabla h = 0$

↑ ↑

divergenza del gradiente di h e il Laplaciano ⇒

$$\nabla^2 h = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0}$$

EQUAZIONE DI LAPLACE, che regge tutti i fenomeni stazionari.

Siamo in presenza di un campo armonico se

$\nabla \cdot v = 0$

$v = -K \nabla h$

COME SI RISOLVE L'EQ DI LAPLACE

"CORSO DI GEOTECNICA" 25/11/11

"Moto in Regime Stazionario"

caratteri del moto invarianti nel tempo.

$$\nabla \cdot v = 0$$

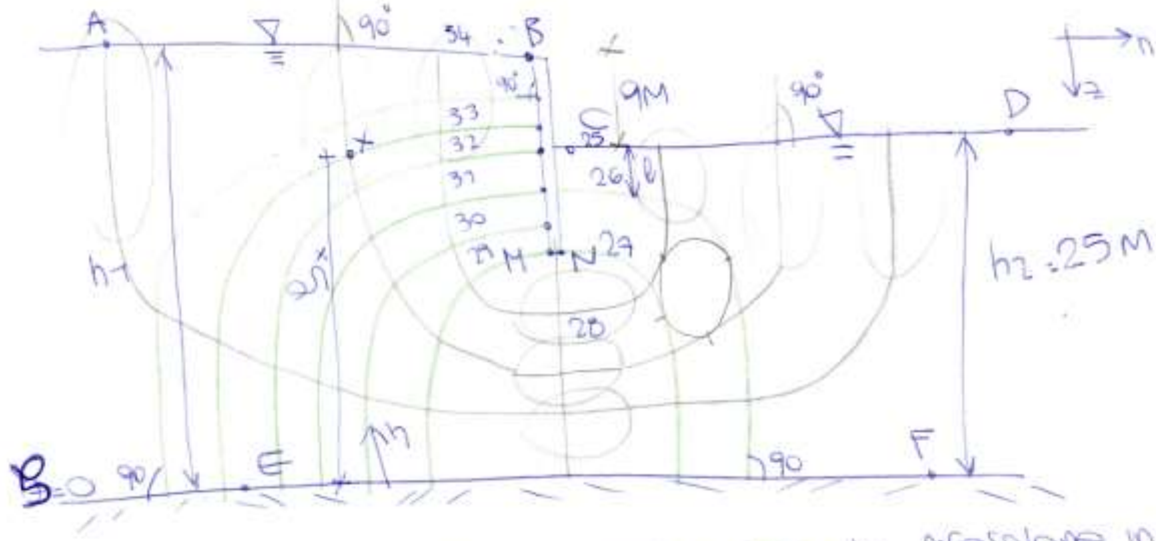
$$\underline{v} = -K \nabla K$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla^2 h = 0$$

2D : $\boxed{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0}$ Equazione che governa i moti in regimi stazionari.

oggi discuteremo questa relazione.
Risolviamo quest'equazione in basi astratte, utilizziamo il diaframma usato nell'altra lezione. Terreno sabbioso su fondazione rocciosa.



Se vogliamo conoscere in ogni punto la pressione in terstiziale in ogni punti, dobbiamo risolvere l'eq. di Laplace. Risoluzione analitica se le condizioni al contorno sono semplici.

Si può integrare questa equazione per via grafica, che dà dei risultati molto reali e ci permette anche di capire cosa succede fisicamente. Quell'equazione dice che le variabile indipendente è il carico piezometrico h di (x, e z). Il risultato dell'equazione ottenuta mediante il integrazione al contorno è una funzione:

$$h = h(x,z)$$

Integrando quell'equazione bisogna sapere se ∃ la soluzione e se è unica quella soluzione.

La nostra prima equazione rimane chiedersi dell'esistenza e dell'unicità della soluzione. Bisogna ottenere delle soluzioni stabili, quindi non deve divergere per piccole variazioni dei parametri. (Soluzione matematicamente ben posta)

~~Le condizioni al contorno sono definite a termini di gradiente al contorno~~

(|) = verticale, tang alle linee equipotenziali.

(—) = tratti orizzontali xchè quella è la 1a linea di flusso

~~Falda~~

le condizioni al contorno possono essere definite in termine di variabile indipendente h e del gradiente h -

_"CONDIZIONI AL CONTORNO": devono contenere h

1. Tratto $\overline{AB}$: è una equipotenziale, e quindi la condizione al contorno da imporre è $h = h_2$ -

2. Tratto $\overline{CD}$: è un equipotenziale $h = h_2$ -

3. Tratto $\overline{EF}$: non possiamo imporre la pressione in quei punti, perché sul piano $p = 0$ la pressione varia da punto a punto - Qui non possiamo definire la condizione al contorno - Risolviamo questo problema così: lungo EF la particella d'acqua si sposta orizzontalmente, quindi EF è una linea di flusso x che la tg alla velocità è diretta orizzontalmente ⇒ linea di flusso - Condizione al contorno $v_n = 0$, che non basta per definire la condizione vera

$$\frac{\nabla F}{|\nabla F|} \cdot \nabla h = 0$$ ⇒ ottengo la condizione al contorno corretta per dire che è una linea di flusso

∇F = eq nello spazio di una superficie, divido per il modulo per ottenere il versore di quella $\$$. Eq è una $\$$ nota per definizione - Ede definita questa $\$$ solo in funzione della regolarità della $\$$ -

$v_n = \underline{v} \cdot \underline{n}$ e $\underline{v} = -k \nabla h$

4. Tratto $\overline{BMNC}$: è anche lui una linea di flusso xché non può attraversare all'interno del diaframma, quindi applichiamo la stessa condizione di contorno -

La soluzione è: $h = h(x, z)$, ovvero, la soluzione che mi permette di dire quanto vale h in ogni punto del mio dominio. La soluzione sarà una famiglia di curve equipotenziali, che punto per punto tali equipotenziali devono essere ⊥ alle linee di flusso. Noi interessa graficamente a tracciare le famiglie + semplici da disegnare ovvero le linee di flusso, dopodiché provo a disegnare quella ortogonale ovvero le curve equipotenziali. Chiaramente devono verificare tali curve le condizioni di contorno. Quindi vado a disegnare nel grafico quella parte disegnata a matita pag 43.

In verde andremo poi a disegnare la famiglie delle equipotenziali, che nel tratto iniziale e finale sono rispettivamente orizzontali e verticali. Per correggere e bilanciare la rete di filtrazione dobbiamo poter inscrivere delle circonferenze. Se tali circonferenze non si possono disegnare bisogna migliorare la curvatura. ~~[illegible]~~

"INTERPRETAZIONE della SOLUZIONE"

Cosa ne facciamo della soluzione grafica che otteniamo?

Consideriamo il punto X.

1. Campo delle pressioni neutre: dalle reti di flusso è noto $h_x = 32\,m$ (lo leggo dal grafico). Nello stesso punto è nota anche la quota geometrica $\xi_x = 26\,m$

$$h_x = \xi_x + \frac{u_x}{\gamma_w} \qquad u_x = (32-36)\gamma_w = 6\gamma_w$$

↑ ad occhio lo si calcola graficamente

$\sigma_z = cost \qquad \sigma'_z = \sigma_z - u_x$ conosco così il campo delle tensioni efficaci.

Siamo in grado di calcolare la pressione dell'

1.7.4.2 acqua in tutti i punti. E quindi la rete ~~[illegible]~~ di

Filtrazione idraulica -

2. Calcolo del gradiente idraulico (che calcoliamo nei punti critici (a valle) dove si ha la superficie libera - quindi in prossimità del punto C -
Δh = è il salto che ho tra l'equipotenziale 26 e 25 -

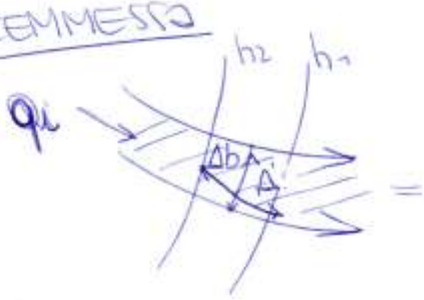
$$i_{(C)} = \frac{\Delta h}{L} = \frac{h_i - h_{i-1}}{\ell_{i-(i-1)}} = \frac{26-25}{\ell}$$

Il moto da 26 e 25 è dovuto alla differenza di carico che si ha in quel ~~tratto~~ tratto tra l'equipotenziale 26 e 25 -

~~[illegible]~~ Il gradiente idraulico è maggiore laddove le equipotenziali si infittiscono poiché la distanza tra un equipotenziale e l'altro è minore, però il salto tra un equipotenziale e l'altra è costante per tutte le equipotenziali - Quindi graficamente i punti critici sono visibili -

3. Calcolo delle portate:

1) PREMMESSA



= Questo tratteggiato è un tubo di flusso, entro la quale si ha il flusso d'acqua -

Δa è l'area trasversale A -

$$q_i = V \cdot A = V \cdot \Delta a = K \frac{\Delta h}{\Delta b} \cdot \Delta a$$

Nel nostro caso abbiamo 4 tubi di flusso, e possiamo calcolare la portata in ogni punto del nostro tubo, xchè la quantità di tubo che filtra nel tubo è sempre la stessa. Perché se la sezione si restringe aumenta la velocità se la sezione è enorme diminuisce la velocità. Si deve verificare l'equilibrio della portata. In generale allora:

$$Q = \Sigma k \,\Delta h$$

Problema caratterizzato dall'isotropia. La permeabilità alla scala dell'area è difficile perché questa è una proprietà intrinseca del materiale e quindi, varia da zona a zona, non ho un valore uguale per ogni punto del terreno. Il coefficiente di permeabilità k abbiamo considerare come ordini di grandezza. Bisogna essere molto cautelativi. k dunque è uno dei valori + difficile da definire, dato che noi lo consideriamo per i modelli e non per l'intera area.

"MOTI IN REGIME TRANSITORIO" (Modello della teoria della consolidazione).

Li tratteremo con la teoria monodimensionale consolidazione. Funzione della struttura dipende anche dal cedimento del terreno.

L'equazione di continuità recita che:

$$(1) \quad \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} = \nabla \cdot v \qquad v \text{ velocità di filtrazione}$$

(2) se per Hp siamo in dimensioni 1D, questa equazione diventa:

$$\frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

(3) Introduciamo adesso la legge di Darcy:

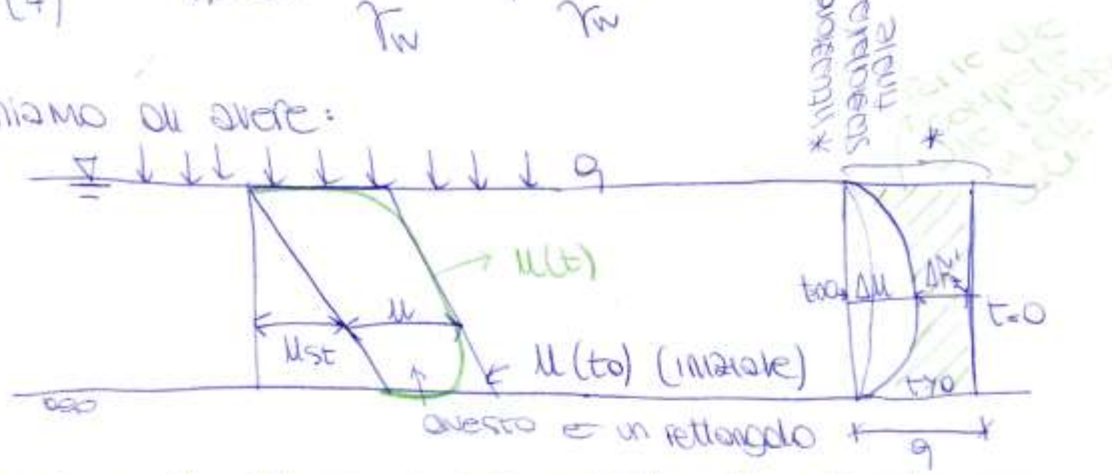
$$v_z = -k \frac{\partial h}{\partial z}$$

2751 Immaginiamo di scrivere il valore della quota piezometrica h come somma di:

(4) $$h = z + \frac{u_{st}}{\gamma_w} + \frac{u}{\gamma_w}$$

pressione stazionaria (u_{st}) — sovrappressione interstiziale (u)

supponiamo di avere:



Immaginiamo di applicare il carico della nostra fondazione. Si crea una sovrappressione dell'H_2O = in tutti i punti al carico che ho applicato.
Cosa succede ad un istante di tempo successivo?
L'andamento della curva ha un andamento verde, xché si è dissipata la pressione interstiziale in alcuni punti.
Ogni curva registra la sovrappressione interstiziale allo stesso istante.
Quando tutta la sovrappressione interstiziale a tempo ∞ si sarà dissipata avremo la situazione iniziale, ovvero, quella del triangolo, poiché via via le curve piccole di quella verde vanno sempre + ad appiattirsi.

Poiché $t=0$ $\Delta u = q \Rightarrow \Delta\sigma'_z = 0$ (tutto il carico è sopportato dall'H_2O.

Per $t=\infty$ $\Delta u = 0 \Rightarrow \Delta\sigma'_z = q$

q viene spartito tra le tensioni efficaci e la sovrappressione interstiziale.
Se nel tempo si evolve la tensione efficace, man mano evolve il cedimento del terreno.

Se sostituisco la (4) nella (3) e poi nella (2):
mi rimane solo la derivata seconda della sovrappressione interstiziale rispetto rispetto a z:

$$\frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial t} = \frac{-K}{\gamma_w}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Ho però 2 incognite: $\partial \varepsilon_{zz}$ e $\partial^2 u$, che non posso risolvere
che risolvo con ~~espressioni~~ il legame costitutivo
(5):

$$\partial \varepsilon_{zz} = \frac{\partial \sigma'_{zz}}{M}$$

modulo edometrico

(6) Equazione di equilibrio: significa che durante l'evoluzione del mio fenomeno non cambia $\Delta\sigma'_z$ è costante xchè q è costante $\Rightarrow$:

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \sigma'_{zz}}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial t}$$

Se sostituiamo la (6) nella (5) e poi nella (4) otteniamo:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = C_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}$$

Equazione della consolidazione -

$$\boxed{C_v = \frac{KM}{\gamma_w}}$$

coefficiente di consolidazione, che contiene tutti i parametri, proprietà del nostro mezzo, condensate in quel coefficiente -
Stiamo trattando un fenomeno parabolico -
- "IMPORTANZA dell'EQ. DIFFERENZIALE":

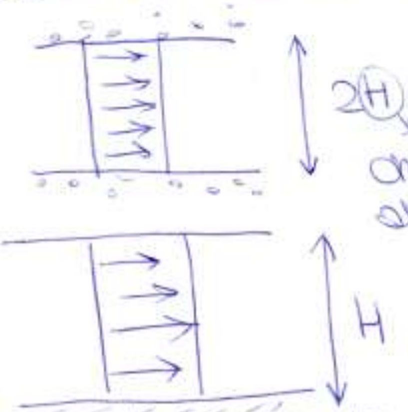
E' famosa perchè se C_v la chiamo conducibilità termica indica il flusso di calore, in biologia la migrazione delle specie animali, ecc... - E' la
1762 più importante equazione dif-

ferenziale di modo -

"SOLUZIONE DELL'EQ. DIFFERENZIALE"

Risolverla è + difficile xchè lega la variabile tempo e la variabile spazio -

(a) specificare le condizioni iniziali (vuol dire leggere il problema come problema di Cauchy) - Noi abbiamo una situazione iniziale isocora:



lunghezza caratteristica, max lunghezza che la particella deve fare per arrivare alla frontiera

(b) specifichiamo le condizioni al contorno, il problema diventa un problema di Dirischelet

Per risolvere i problemi ingegneristici:

soluzione: $u = u(t,z)$ $\quad \forall t,z$

Conoscere localmente la u nel nostro terreno non risolve nulla nel nostro problema del cedimento -

x alle pressioni interstiziali che si sono dissipate

U_S = grado di consolidazione medio = $\frac{w(t)}{w_c}$ = (*)

$w(t)$ è quello che noi vogliamo calcolare nell'istante generico t -

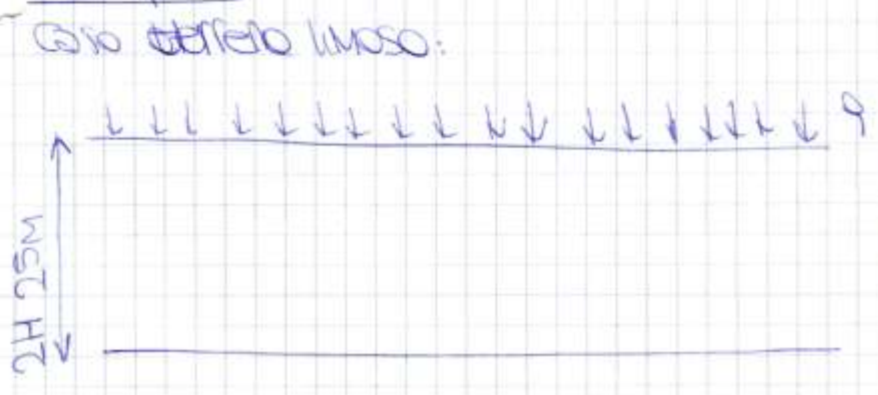
$$(*) = \frac{\int_0^{2H} (u_0 - u(t))\,dz}{\int_0^{2H} u_0\,dz}$$

$\log T_v$ = logaritmo di un tempo adimensionale -

$$T_v = C_v \frac{t}{H^2}$$

Soluzione adimensionalizzata che può essere usata sempre.

Esempio:
Caso terreno limoso:



$w_c = 0,80 m$
$C_v = 3 \cdot 10^{-7} m^2/s$

Supponiamo di aver calcolato con il metodo edometrico.
$w_c = 0,80$ = cedimento di 80 cm.
Noi vogliamo sapere in quanto tempo avremo il cedimento nel tempo?
Tesi: Definire l'evoluzione del cedimento nel tempo.
1° cosa da sapere è il cedimento di consolidazione.
$[C_v] = [L^2 T^{-1}]$.
Voglio costruire in funzione del tempo t come variano i cedimenti.

17/12

Supponiamo di voler conoscere il cedimento a 40 cm -

$$w(t) = 0,40\,m \Rightarrow U_S = \frac{w(t)}{w_c} = \frac{0,4}{0,8} = 0,5$$

entro con 0,5 nel grafico nella pagina iniziale di prima -

$$U_S = 0,5 \Rightarrow T_v = 0,196$$

$$T_v = \frac{C_v \cdot t}{H^2} \qquad t = \frac{T_v H^2}{C_v} = \frac{0,196 \cdot 12,5^2}{} = 3,25 \text{ anni}$$

H è legato alle condizioni di drenaggio della frontiera sopra e quella sotto $\Rightarrow H = \frac{2H}{2} = 12,50\,m$.
Se mi pongo il problema di calcolare il cedimento finale - Immaginiamo di entrare nel disegno della tabella precedente con un valore di 0,90 ⇒ 90% del cedimento

$$\text{Se } U_S = 0,9 \rightarrow T_v = 0,848$$

$$U_S = 0,9 \Rightarrow w(t) = 0,9\,w_c = 0,72\,m$$

$$t = \frac{0,848 \cdot H^2}{C_v}$$

Siamo in grado di definire il cedimento e come questo avviene -
Arriveremo a stabilizzazione solo dopo un certo periodo di tempo -