



Politecnico di Torino - Facoltà di Ingegneria

Corso di laurea in Ingegneria Civile

Laboratorio di sintesi finale – F. Biasioli

Rivisto: 20/03/2011

Punti 3

Argomento:

2.4 Calcolo di spostamenti e rotazioni delle travi semplici: metodo di Mohr - La trave ausiliaria

Riferimenti bibliografici:

Note

Il metodo di Mohr si basa sulla similitudine formale delle due equazioni differenziali che legano una la curvatura $y''(z)$ con il momento flettente $M(z)$ e l'altra il momento flettente $M(z)$ con il carico $q(z)$.

$$(a) \frac{d^2y(z)}{dz^2} = -\frac{M(z)}{EI}$$

$$(b) \frac{d^2M(z)}{dz^2} = -q(z)$$

Considerando un carico fittizio $q^* = \frac{M}{EI}$ dalla relazione (b) si ricava il momento flettente fittizio $M^*(z)$ che per la (a) rappresenta la linea elastica $y(z)$ della trave reale. Derivando rispetto a z il momento fittizio $M^*(z)$ si ottiene il taglio fittizio $T^*(z)$ che rappresenta la rotazione dy/dz della generica sezione della trave reale. Il taglio fittizio calcolato agli estremi della trave coincide con le rotazioni di tali sezioni.

Dato che due equazioni differenziali rappresentano uno stesso fenomeno solo se le loro costanti di integrazione sono uguali, occorre caricare con il carico fittizio una trave, la "trave ausiliaria", i cui vincoli esterni ed interni devono rispettare le condizioni di deformabilità, negli stessi punti, della trave reale. La trave ausiliaria è una trave fittizia avente la stessa lunghezza globale della trave reale e tale da soddisfare le condizioni al contorno compatibili con le possibilità di deformazione: spostamenti e rotazioni - della trave reale. Per una trave di una campata con appoggi semplici la trave ausiliaria è la trave stessa.

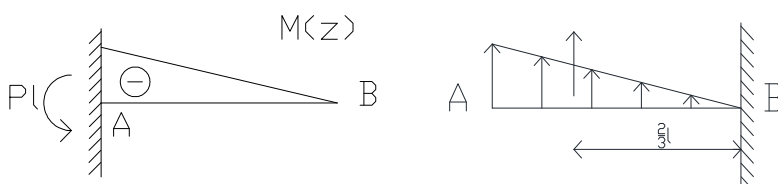
Il metodo di Mohr permette di calcolare gli spostamenti e le rotazioni delle travi semplici. Si traccia il diagramma del momento flettente $M(z)$ relativo alla trave in esame. Successivamente si carica la trave "ausiliaria" con un carico pari al diagramma $M(z)/EI$ e si tracciano i diagrammi di Momento $M^*(z)$ e taglio $T^*(z)$ che rappresentano la linea elastica $y(z)$ e la linea delle rotazioni dy/dz .

Esempio n°1: calcolare la rotazione dell'estremo A della trave caricata dal carico P nella sezione di mezzeria.

reazione vincolare della trave ausiliaria è pari al taglio T_A , dunque alla rotazione ϕ_A alla sezione A.

La risultante del carico è $\bar{R} = \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{Pl}{4EI}$, pertanto $R_a = \phi_a = \frac{ql^2}{16EI}$

Esempio n°2: Calcolare abbassamento e rotazione del punto B della mensola con una forza P all'estremo libero.



Nel caso di una mensola

- l'estremo A della trave reale ha abbassamento e rotazione nulli: nella trave ausiliaria, si deve dunque avere, per qualunque tipo di carico, un momento fittizio $M^*(z)$ e un taglio fittizio $T^*(z)$ nulli: ciò è possibile solo in un estremo libero
- nell'estremo B della trave reale si ha un abbassamento e una rotazione non nulli: nella trave ausiliaria, deve essere presente un vincolo in grado di fornire un momento fittizio $M^*(z)$ e un taglio fittizio $T^*(z)$ non nulli: si tratta di un vincolo di incastro

Per rispettare le possibilità di deformazione della trave reale, nel caso di una mensola si invertono pertanto l'estremo libero con l'incastro e viceversa.

Essendo il momento negativo, il carico è diretto verso l'alto

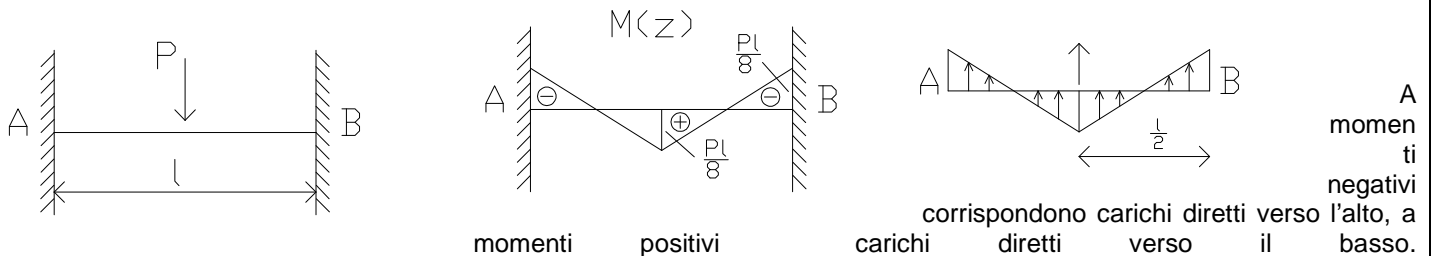
La rotazione nel punto B è la reazione vincolare nella trave ausiliaria. La risultante del carico è $\bar{R} = \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{Pl}{EI} = \phi_B$. L'abbassamento

nel punto B è pari al momento fittizio nel punto B e vale $y_B = \frac{Pl^3}{3EI}$.

La trave ausiliaria può anche essere una trave libera (non vincolata alle estremità) come nel caso di trave doppiamente incastrata. Poiché come qualsiasi trave anche la trave ausiliaria deve essere in equilibrio alla rotazione e alla traslazione, il diagramma di momento dovrà essere simmetrico e con compensazione delle aree.

Esempio n°3:

Calcolare l'abbassamento e la rotazione nel punto di mezzeria della trave caricata come in figura.



La rotazione alle estremità, pari alla reazione vincolare della trave ausiliaria, deve essere nulla dunque le aree di carico di ciascuna metà si devono compensare. Dato che per il principio di sovrapposizione degli effetti la semisomma dei momenti di estremità della trave e del momento di campata deve uguagliare il momento $Pl/4$ della trave isostatica, ciascun momento deve valere $Pl/8$.

La risultante di ciascun triangolo è $\frac{1}{2} \frac{Pl}{8} \frac{1}{4} = \frac{Pl^2}{64EI}$: due triangoli successivi compresi tra un estremo e la mezzeria formano una coppia di braccio di leva $2 \frac{2}{3} \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$.

Il momento di tale coppia fornisce l'abbassamento in mezzeria $y_{1/2} = \frac{Pl^2}{64EI} \frac{1}{3} = \frac{Pl^3}{192EI}$.